Acta Sci. Math., 41 (1979), 173—185

Über die Veränderung der Länge der Vektoren in Weyl–Otsukischen Räumen

ARTHUR MOÓR

§ 1. Einleitung

T. OTSUKI entwickelte in seiner Arbeit [4] eine Übertragungstheorie in Punkträumen, die in lokaler Schreibweise dadurch charakterisiert werden kann, daß die *Übertragungsparameter* ${}'\Gamma_j{}^i{}_k$ *bzw.* ${}''\Gamma_j{}^i{}_k$ für die ko- bzw. kontravarianten Indizes der Tensoren im allgemeinen voneinander verschieden sind, zwar sind sie miteinander durch eine Relation verbunden (vgl. [4], (3.13)). Außerdem sind die durch diese Übertragungsparameter gebildeten affinen kovarianten Ableitungen mit einem „a priori" angegebenen und die geometrische Struktur des Raumes bestimmenden *Tensor* P^i_j kontrahiert. In [3] bestimmten wir solche Übertragungsparameter für diese Otsukischen Räume, die aus einem metrischen und symmetrischen *Grundtensor* $g_{ij}(x)$ [1] abgeleitet waren, und die für g_{ij} rekurrente kovariante Ableitung bestimmten. Somit vereinigten wir die Weylschen und die Otsukischen Übertragungstheorien (vgl. [4] und [5]) — wir wollen im folgenden diese Räume *Weyl—Otsukische Räume* nennen — und untersuchten in erster Reihe die Eigenschaften der *Eigentensoren* bezüglich des invarianten Differentials.

In den Weylschen Räumen verändert sich bekanntlich die Länge der Vektoren bei einer Parallelverschiebung proportional mit der ursprünglichen Länge (vgl. z. B. [2], § 4, wo aber im Falle der Punkträume durchwegs $\gamma^*_k \equiv 0$ gesetzt werden muß). Wir wollen im folgenden die Veränderung der Länge der Vektoren, ferner die Veränderung gewisser Invarianten der Tensoren zweiter Stufe bei Parallelverschiebung in den Weyl—Otsukischen Räumen untersuchen und die Veränderung, genauer den Differentialquotienten dieser Invarianten nach einem Parameter „t" bestimmen, falls die Parallelverschiebung längs einer vorgegebenen Kurve $C: x^i = x^i(t)$ durch-

Eingegangen am 3. März 1977.

[1]) $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ bedeutet jetzt und im folgenden einen Punkt im n-dimensionalen Punktraum.

geführt wird; vgl. Formeln: (3.10), (4.4) und (5.4), die unsere wichtigste Resultate ausdrücken.

Besondere Wichtigkeit haben in diesen Räumen die sog. Eigentensoren. Unsere Sätze 2, 4 und 7 beziehen sich eben auf die Veränderung der charakteristischen Invarianten der Eigenvektoren und Eigentensoren des Raumes bei Parallelverschiebungen längs gewisser Kurven.

§ 2. Fundamentalformeln der Weyl—Otsukischen Räume

Die Grundgrößen eines Weyl—Otsukischen Raumes sind der in (i, k) symmetrische metrische Grundtensor $g_{ik}(x)$, der kovariante Vektor $\gamma_k(x)$ und der gemischte Tensor $P^i_j(x)$, von dem wir im folgenden durchwegs annehmen wollen, daß er der Relation

$$P^r_i g_{rj} = P^r_j g_{ir} \tag{2.1}$$

genügt, d. h. P_{ij} ist in (i, j) symmetrisch. Der inverse Tensor von P^i_j soll durch die Formeln

$$Q^i_r P^r_j = \delta^i_j, \tag{2.2a}$$

$$Q^r_j P^i_r = \delta^i_j \tag{2.2b}$$

festgelegt sein, wo (2.2b) nach der Tensoralgebra — bekanntlich — eine Folgerung von (2.2a) ist. Aus (2.1) folgt leicht, daß neben P_{ij} auch Q_{ij} symmetrisch ist.

Die Übertragungsparameter $''\Gamma_j{}^i{}_k$ bzw. $'\Gamma_j{}^i{}_k$ — die bei der Bildung der kovarianten Ableitung der Tensoren für ko- bzw. kontravariante Indizes verwendet werden — sind durch die Relationen (vgl. (3.13) von [4]):

$$\partial_k P^i_j + ''\Gamma_r{}^i{}_k P^r_j - '\Gamma_j{}^r{}_k P^i_r = 0, \quad \partial_k \equiv \frac{\partial}{\partial x^k} \tag{2.3}$$

miteinander verbunden.

Die kovarianten Ableitungen bzw. das invariante Differential für einen gemischten Tensor $V_j{}^i{}_k$ sind die folgenden:

$$V_j{}^i{}_{k|m} = \partial_m V_j{}^i{}_k + '\Gamma_r{}^i{}_m V_j{}^r{}_k - ''\Gamma_j{}^r{}_m V_r{}^i{}_k - ''\Gamma_k{}^r{}_m V_j{}^i{}_r, \tag{2.4}$$

$$\nabla_m V_j{}^i{}_k = P^i_r V_s{}^r{}_{t|m} P^s_j P^t_k, \tag{2.5}$$

$$D V_j{}^i{}_k = \nabla_m V_j{}^i{}_k \, dx^m, \tag{2.6}$$

wo die Struktur des Raumes im wesentlichen durch (2.5) und (2.6) festgelegt ist (vgl. [4] § 2 und § 3, insbesondere (2.14), (2.15) und (3.6)—(3.8)). Aus (2.4)—(2.6) sieht man schon, wie diese Operationen auf beliebige Tensoren erweitert werden können. Für ein Skalarfeld $S(x)$ gilt selbstverständlich

$$S_{|m} \equiv \nabla_m S = \partial_m S, \quad DS = dS.$$

Die Übertragungsparameter $''\Gamma_j{}^i{}_k$ sind durch die Gleichungen

(2.7) $$\nabla_k g_{ij} = \gamma_k(x) g_{ij}(x)$$

festgelegt, die für die in (j, k) symmetrischen $''\Gamma_j{}^i{}_k$ ein Gleichungssystem bilden, die leicht gelöst werden kann (vgl. [3], Formel (2.3) und die nachfolgenden Zeilen).

Neben (2.6) benötigen wir im folgenden das invariante Differential

(2.8) $$\bar{D}V_j{}^i{}_k = V_j{}^i{}_{k|m}\, dx^m \equiv dV_j{}^i{}_k + ('\Gamma_r{}^i{}_m V_j{}^r{}_k - ''\Gamma_j{}^r{}_m V_r{}^i{}_k - ''\Gamma_k{}^r{}_m V_j{}^i{}_r)\, dx^m,$$

womit nach (2.5) und (2.6) das invariante Differential D in der Form:

(2.9) $$DV_j{}^i{}_k = P^i_r(\bar{D}V_s{}^r{}_t) P^s_j P^t_k$$

geschrieben werden kann. Für ein Skalarfeld $S(x)$ ist selbstverständlich $DS = \bar{D}S = dS$. Längs einer Kurve $C: x^i = x^i(t)$ verwenden wir im weiteren statt des invarianten Differentials immer den längs C gebildeten invarianten Differentialquotienten D/dt bzw. $\bar{D}/dt$.

§ 3. Veränderung der Länge der Vektoren bei Parallelverschiebung

Die quadrierte Länge V^2 eines Vektors $\vec{V}$ mit den lokalen Komponenten V^i ist durch die Formel:

(3.1) $$V^2 \stackrel{\text{def}}{=} g_{ij}(x) V^i V^j$$

festgelegt. Längs einer Kurve $C: x^i = x^i(t)$ ist nun der invariante Differentialquotient mit dem gewöhnlichen identisch. Aus (3.1) folgt somit längs C:

(3.2) $$\frac{DV^2}{dt} = \frac{\bar{D}V^2}{dt} = \frac{dV^2}{dt} = \frac{dg_{ij}}{dt} V^i V^j + 2g_{ij}\frac{dV^i}{dt} V^j.$$

Beachten wir nun die Formel (2.8) der Operation: $\bar{D}$, so folgt unmittelbar die Formel:

(3.3) $$\frac{\bar{D}\delta^i_r}{dt} = ('\Gamma_r{}^i{}_k - ''\Gamma_r{}^i{}_k)\frac{dx^k}{dt},$$

womit (3.2) in folgende Form verwandelt werden kann:

(3.4) $$\frac{DV^2}{dt} = \frac{\bar{D}g_{ij}}{dt} V^i V^j + 2g_{ij}\frac{\bar{D}V^i}{dt} V^j - 2g_{ij}\frac{\bar{D}\delta^i_r}{dt} V^r V^j.$$

Bemerkung. Die Übereinstimmung der Formeln (3.2) und (3.4) könnte auch unmittelbar bestätigt werden, wenn in (3.4) für $\bar{D}g_{ij}$ bzw. $\bar{D}V^i$ die Übertragungsparameter $''\Gamma_j{}^i{}_k$ bzw. $'\Gamma_i{}^j{}_k$ verwendet werden, und auch noch (3.3) beachtet wird. —

Die Operation $\bar{D}$ kann auf Grund von (2.9) auch mit der Operation D ausgedrückt werden, wenn beachtet wird, daß für P^i_j auf Grund von (2.2a) die Existenz eines inversen Tensors: Q^i_j postuliert wurde. Nach Kontraktionen wird:

$$\bar{D}g_{ij} = Q^r_i Q^s_j Dg_{rs}, \tag{3.5}$$

$$\bar{D}\delta^i_r = Q^i_m Q^s_r D\delta^m_s, \quad (3.6) \qquad \bar{D}V^i = Q^i_r DV^r, \quad (3.7)$$

wo wir — Einfachheit halber — immer nur $\bar{D}$ bzw. D statt $\frac{\bar{D}}{dt}$ bzw. $\frac{D}{dt}$ geschrieben haben.

Beachten wir nun diese Formeln, so wird aus (3.4):

$$\frac{DV^2}{dt} = \frac{Dg_{rs}}{dt} Q^r_i Q^s_j V^i V^j + 2g_{ij}\left(Q^i_r \frac{DV^r}{dt} V^j - Q^i_m Q^s_r \frac{D\delta^m_s}{dt} V^r V^j\right). \tag{3.8}$$

Auf Grund der Rekurrenz des metrischen Grundtensors, d. h. auf Grund von (2.7) wird nun im Hinblick auf (2.6):

$$\frac{DV^2}{dt} = Q^r_i Q^s_j g_{rs} V^i V^j \gamma_k \frac{dx^k}{dt} + 2g_{ij}\left(Q^i_r \frac{DV^r}{dt} V^j - Q^i_m Q^s_r \frac{D\delta^m_s}{dt} V^r V^j\right). \tag{3.9}$$

Da $DV^2 = 2VDV$ ist, bestimmt diese Formel die allgemeinste Form für die Veränderung der Länge eines kontravarianten Vektors bei einer Verschiebung längs einer Kurve: C. Ist diese Verschiebung eine Parallelverschiebung, d. h. ist $DV^r = 0$, so gilt auf Grund von (3.9) der

Satz 1. *In einem Weyl—Otsukischen Raum ist die Veränderung der Länge V eines kontravarianten Vektors V^i bei einer Parallelverschiebung längs einer Kurve $C: x^i = x^i(t)$ durch*

$$\frac{DV}{dt} = \frac{1}{2} V^{-1} Q^r_i Q^s_j g_{rs} V^i V^j \gamma_k \frac{dx^k}{dt} - V^{-1} g_{ij} Q^i_m Q^s_r \frac{D\delta^m_s}{dt} V^r V^j \tag{3.10}$$

bestimmt.

Nehmen wir nun an, daß V^i längs C ein Eigenvektor mit dem Eigenfunktion $\tau(t)$ ist, d. h. es besteht:

$$P^i_m V^m = \tau V^i \quad (\tau(t) \neq 0). \tag{3.11}$$

Nach einer Überschiebung mit Q^i_r folgt aus (3.11) nach (2.2a):

$$Q^r_i V^i = \tau^{-1} V^r. \tag{3.12}$$

Beachten wir noch die Symmetrie von Q_{ij} in (i, j), was aus der Bedingung (2.1) nach einer Kontraktion mit $Q^i_h Q^j_k$ unmittelbar folgt, so wird:

$$g_{ij} Q^i_m = g_{im} Q^i_j \tag{3.13}$$

und (3.9) geht im Hinblick auf (3.12) in

$$(3.14)\qquad \frac{DV^2}{dt} = \tau^{-2}V^2\gamma_k\frac{dx^k}{dt} + 2g_{ij}Q^i_r\frac{DV^r}{dt}V^j - 2\tau^{-2}g_{im}\frac{D\delta^m_s}{dt}V^sV^i$$

über. Aus (3.11) folgt aber auch die Relation:

$$(3.15)\qquad P^m_k\frac{DV^k}{dt} + \frac{D\delta^m_s}{dt}V^s = \tau\left(\frac{DV^m}{dt} + \frac{d\tau}{dt}V^m\right)$$

(vgl. [4], (5.8); oder [3], (3.8)).

Mit Hilfe von (3.15) können wir $\frac{D\delta^m_s}{dt}V^s$ aus (3.14) eliminieren. Ist längs C auch $\frac{DV^r}{dt}=0$, so gilt wegen

$$\frac{DV^2}{dt} \equiv \frac{dV^2}{dt} = 2V\frac{DV}{dt}$$

(nur für Skalare ist $D/dt \equiv d/dt$) der folgende

Satz 2. *Ist V^i längs C ein Eigenvektor mit der Eigenfunktion τ, gilt* (2.1), *und ist ferner $\frac{DV^i}{dt}=0$, so ist $\frac{DV}{dt}$ zur ursprünglichen Länge V proportional:*

$$(3.16)\qquad \frac{DV}{dt} = \left(\frac{1}{2}\tau^{-1}\gamma_k\frac{dx^k}{dt} - \frac{d\tau}{dt}\right)\tau^{-1}V.$$

Aus diesem Satz bzw. aus der Formel (3.16) folgt unmittelbar das

Korollar 2*. *Ist V^i längs C ein Eigenvektor mit der Eigenfunktion $\tau(t)$, ist ferner längs C*

$$\gamma_k(x(t))\frac{dx^k}{dt} = \frac{d\tau^2}{dt},$$

und besteht noch die Bedingung (2.1), *so ist bei Parallelverschiebung längs C die Länge V von V^i eine Konstante.*

§ 4. Veränderung der Fundamentalinvariante der symmetrischen Tensoren

Zu einem in (i, j) symmetrischen rein kontravarianten Tensor T^{ij} ordnen wir durch die Definitionsformel

$$(4.1)\qquad T \overset{\text{def}}{=} g_{ij}T^{ij}$$

eine Invariante: T, die wir als *Tensorlänge* des symmetrischen Tensors T^{ij} nennen wollen. Diese Invariante ist für antisymmetrische Tensoren zweiter Stufe offenbar identisch Null, und für allgemeine kontravariante Tensoren ist T nur mit ihrem symmetrischen Teil gebildet. Die Invariante T hat also wirklich nur für einen symmetrischen Tensor einen Sinn. Für die Tensorlänge der antisymmetrischen Tensoren werden wir im folgenden Paragraphen eine andere Definition angeben.

Auf Grund der Definition des invarianten Differentialquotienten ist

$$\frac{DT}{dt} \equiv \frac{dT}{dt} = \frac{dg_{ij}}{dt} T^{ij} + g_{ij} \frac{dT^{ij}}{dt}.$$

eaBchten wir nun, daß nach (2.8) die Operation $\bar{D}/dt$ für ko- bzw. kontravariante Tensoren mit den Übertragungsparameter $''\Gamma_j{}^i{}_k$ bzw. mit $'\Gamma_j{}^i{}_k$ gebildet werden muß, so bekommt man aus unserer letzten Formel in Hinsicht auf (3.3):

$$\frac{DT}{dt} = \frac{\bar{D}g_{ij}}{dt} T^{ij} + g_{ij} \frac{\bar{D}T^{ij}}{dt} - g_{ij}\left(\frac{\bar{D}\delta^i_r}{dt} T^{rj} + \frac{\bar{D}\delta^j_r}{dt} T^{ir}\right), \tag{4.2}$$

was offenbar längs der Kurve $C: x^i = x^i(t)$ gültig ist.

Drücken wir jetzt die Operation $\bar{D}/dt$ durch D/dt aus, was auf Grund der Formel (2.9) mit Hilfe des inversen Tensors Q^i_j von P^i_j leicht durchführbar ist (vgl. unsere Formeln (3.5) und (3.6)), so geht (4.2) im Hinblick auf (2.7) in

$$\frac{DT}{dt} = Q^r_i Q^s_j g_{rs} T^{ij} \gamma_k \frac{dx^k}{dt} + g_{ij}\left(Q^i_r Q^j_s \frac{DT^{rs}}{dt} - Q^i_s Q^e_r \frac{D\delta^s_e}{dt} T^{rj} - Q^j_s Q^e_r \frac{D\delta^s_e}{dt} T^{ir}\right) \tag{4.3}$$

über. Aus dieser Formel folgt der

Satz 3. *Die Veränderung der durch* (4.1) *bestimmten Tensorlänge T ist bei einer Parallelverschiebung von T^{ij}, d. h. im Falle $DT^{ij}=0$ durch die folgende Formel angegeben:*

$$\frac{DT}{dt} = Q^r_i Q^s_j g_{rs} T^{ij} \gamma_k \frac{dx^k}{dt} - g_{ij}\left(Q^i_s Q^e_r \frac{D\delta^s_e}{dt} T^{rj} + Q^j_s Q^e_r \frac{D\delta^s_e}{dt} T^{ir}\right). \tag{4.4}$$

Nehmen wir nun an, daß der symmetrische Tensor T^{ij} längs C ein Eigentensor ist, d. h. es gilt längs C:

$$P^i_r P^j_s T^{rs} = \tau(t) T^{ij} \quad (\tau(t) \neq 0). \tag{4.5}$$

Da aus (4.5) auf Grund der Relation (2.2a), längs C

$$\tau^{-1} T^{rs} = Q^r_i Q^s_j T^{ij} \tag{4.5a}$$

folgt, bekommt man aus (4.3) in Hinsicht auf (3.13) und (4.1):

$$\frac{DT}{dt} = \tau^{-1}\gamma_k \frac{dx^k}{dt} T + g_{ij} Q^i_r Q^j_s \frac{DT^{rs}}{dt} - 2\tau^{-1} g_{is} T^{ie} \frac{D\delta^s_e}{dt}. \tag{4.6}$$

Aus der Formel (4.5) folgt nach der Operation D/dt:

$$\frac{D}{dt}(P^i_r P^j_s T^{rs}) = P^i_r P^j_s T^{rs}\frac{d\tau}{dt}+\tau\frac{DT^{ij}}{dt}.$$

Berechnen wir nun auf der linken Seite die Operation D/dt, beachten wir ferner auf der rechten Seite die Formel (4.5) selbst, so wird

$$P^i_a P^j_b\left\{T^{rs}\frac{d}{dt}(P^a_r P^b_s)+P^a_r P^b_s\frac{dT^{rs}}{dt}+('\Gamma_p{}^a{}_k P^p_r P^b_s+'\Gamma_p{}^b{}_k P^a_r P^p_s)T^{rs}\frac{dx^k}{dt}\right\} =$$

$$=\tau\left(\frac{d\tau}{dt}T^{ij}+\frac{DT^{ij}}{dt}\right).$$

Eliminieren wir jetzt aus dieser Formel (dP^a_r) bzw. (dP^b_s) mittels der Formel

$$\text{(4.7)}\qquad \frac{dP^a_r}{dt} = ('\Gamma_r{}^p{}_k P^a_p - ''\Gamma_p{}^a{}_k P^p_r)\frac{dx^k}{dt},$$

was aus (2.3) nach einer Kontraktion durch $\frac{dx^k}{dt}$ unmittelbar folgt, und beachten wir noch die aus (3.3) folgende Relation

$$\text{(4.8)}\qquad \frac{D\delta^i_r}{dt} = P^i_p P^m_r('\Gamma_m{}^p{}_k - ''\Gamma_m{}^p{}_k)\frac{dx^k}{dt} \equiv P^i_p P^m_r\frac{\bar{D}\delta^p_m}{dt},$$

so wird nach entsprechenden Vertauschungen der Indizes:

$$\text{(4.9)}\qquad P^i_a P^j_b\frac{DT^{ab}}{dt}+\left(P^b_s P^j_b\frac{D\delta^i_r}{dt}+P^a_r P^i_a\frac{D\delta^j_s}{dt}\right)T^{rs} = \tau\left(\frac{DT^{ij}}{dt}+\frac{d\tau}{dt}T^{ij}\right).$$

Da aber T^{rs} in (r, s) symmetrisch vorausgesetzt wurde, wird nach einer Kontraktion von (4.9) mit $Q^h_i Q^f_j$, und auf Grund von (2.2a)

$$\text{(4.10)}\qquad \frac{DT^{hf}}{dt}+(P^f_r Q^h_e+P^h_r Q^f_e)\frac{D\delta^e_s}{dt}T^{rs} = \tau\left(\frac{DT^{ij}}{dt}+\frac{d\tau}{dt}T^{ij}\right)Q^h_i Q^f_j.$$

Überschiebung von beiden Seiten der Formel (4.10) mit g_{hf} gibt in Hinsicht auf (2.1), (2.2b) bzw. auf der rechten Seite nach (4.5a):

$$\text{(4.11)}\qquad g_{hf}\frac{DT^{hf}}{dt}+2g_{re}T^{rs}\frac{D\delta^e_s}{dt} = \tau g_{hf}Q^h_i Q^f_j\frac{DT^{ij}}{dt}+\frac{d\tau}{dt}T.$$

Elimineren wir das Glied $\frac{D\delta^e_s}{dt}$ von (4.6) mittels (4.11), so erhält man dem folgenden

Satz 4. *Ist für den symmetrischen Eigentensor T^{ij} längs einer Kurve $C: DT^{ij}=0$, besteht* (2.1), *so ist die Veränderung der durch* (4.1) *angegebenen Tensorlänge T mit T selbst proportional; in expliziter Form:*

$$\frac{DT}{dt} = \left(\gamma_k \frac{dx^k}{dt} - \frac{d\tau}{dt}\right) \tau^{-1} T. \tag{4.12}$$

Analog zur Formel (3.16) und zum Korollar 2*, folgt aus (4.12) das

Korollar 4*. *Ist der symmetrische Tensor T^{ij} längs C ein Eigentensor mit der Eigenfunktion τ, gilt ferner längs C:*

$$\gamma_k(x(t)) \frac{dx^k}{dt} = \frac{d\tau}{dt},$$

so ist bei Parallelverschiebung längs C die Tensorlänge T eine Konstante.

§ 5. Veränderung der Fundamentalinvariante der antisymmetrischen Tensoren

In diesem Paragraphen soll $T^{ij} = -T^{ji}$ durchwegs einen antisymmetrischen Tensor bedeuten. Da der Tensor

$$g_{ijhk} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(g_{ih} g_{jk} - g_{ik} g_{jh})$$

in (i, j) und auch in (h, k) antisymmetrisch ist, ist

$$T_{(a)} \overset{\text{def}}{=} \sqrt{g_{ijhk} T^{ij} T^{hk}} \equiv \sqrt{g_{ir} g_{js} T^{ij} T^{rs}} \tag{5.1}$$

eine Invariante des antisymmetrischen Tensors T^{ij}, die wir als *Tensorlänge* von T^{ij} bezeichnen wollen[2]). Die Einführung des Tensors g_{ijhk} stammt von Prof. A. Kawaguchi (vgl. [1], § 3); für Bivektoren definiert $T_{(a)}$ — bis auf eine Konstante — in arealen Räumen eben das Maß der Bivektoren (vgl. [1], (3.22)).

Längs einer Kurve $C: x^i = x^i(t)$ ist nach (5.1):

$$\frac{DT_{(a)}^2}{dt} = \frac{d}{dt}(g_{ir} g_{js} T^{ij} T^{rs}) \equiv \frac{\bar{D} g_{ir}}{dt} g_{js} T^{ij} T^{rs} + \tag{5.2}$$
$$+ g_{ir} \frac{\bar{D} g_{js}}{dt} T^{ij} T^{rs} + g_{ir} g_{js} \left(\frac{{}''\bar{D} T^{ij}}{dt} T^{rs} + T^{ij} \frac{{}''\bar{D} T^{rs}}{dt}\right),$$

[2]) Der Index „a" bei $T_{(a)}$ bedeutet die Antisymmetrie von T^{ij}; es ist also nicht ein tensorieller Index.

wo $\frac{''\bar{D}}{dt}$ den mit $''\Gamma_{j\,k}^{\,i}$ gebildeten invarianten Differentialquotienten bedeutet. Offenbar ist für rein kovariante Tensoren $''\bar{D}=\bar{D}$.

Benützen wir nun die Antisymmetrie von T^{ij} in „i“ und „j“, so vereinfacht sich die Formel (5.2) auf

$$\frac{1}{2}\frac{DT^2_{(a)}}{dt}=\frac{\bar{D}g_{ir}}{dt}g_{js}T^{ij}T^{rs}+g_{ir}g_{js}\frac{''\bar{D}T^{ij}}{dt}T^{rs}.$$

Mit Hilfe der Formel (3.3) können die Übertragungsparameter $''\Gamma_{i\,k}^{\,j}$ aus $''\bar{D}T^{ij}$ eliminiert werden; da jetzt statt dieser Übertragungsparameter die $'\Gamma_{i\,k}^{\,j}$ hineinkommen, wird wegen $'\bar{D}T^{ij}\equiv\bar{D}T^{ij}$ aus der letzten Gleichung:

$$\frac{1}{2}\frac{\bar{D}T^2_{(a)}}{dt}=\frac{\bar{D}g_{ir}}{dt}g_{js}T^{ij}T^{rs}+\left(\frac{\bar{D}T^{ij}}{dt}-\frac{\bar{D}\delta^i_k}{dt}T^{kj}-\frac{\bar{D}\delta^j_k}{dt}T^{ik}\right)T_{ij}.$$

Unter einer wiederholten Beachtung der Antisymmetrie von T^{ij} und selbstverständlich auch die von T_{ij}, erhält man auf Grund von (2.9), welche Formel die Operationen D und $\bar{D}$ miteinander verknüpft, und ferner wegen (2.2a), (2.2b):

$$(5.3)\qquad T_{(a)}\frac{DT_{(a)}}{dt}=\frac{Dg_{cb}}{dt}Q^c_iQ^b_rT^i_{\ s}T^{rs}+\frac{DT^{cb}}{dt}Q^i_cQ^j_bT_{ij}-2T_{ip}T^{kp}Q^b_kQ^i_c\frac{D\delta^c_b}{dt},$$

da für Skalare offenbar die Operationen $\bar{D}/dt$, D/dt und d/dt übereinstimmen.

Auf Grund von (5.3) folgt im Hinblick auf (2.7) der

Satz 5. *In einem Weyl—Otsukischen Raum ist die Veränderung der Tensorlänge $T_{(a)}$ eines antisymmetrischen Tensors T^{ij} bei einer Parallelverschiebung längs einer Kurve $C: x^i=x^i(t)$ durch:*

$$(5.4)\qquad \frac{DT_{(a)}}{dt}=T^{-1}_{(a)}\left(Q^c_iQ^b_rg_{cb}T^i_{\ s}T^{rs}\gamma_k\frac{dx^k}{dt}-2T_{is}T^{rs}Q^b_rQ^i_c\frac{D\delta^c_b}{dt}\right)$$

bestimmt.

Nehmen wir nun an, daß der Grundtensor P^i_j die Form

$$(5.5)\qquad P^i_j=\varrho\delta^i_j\quad(\varrho=Konst.)$$

hat. In diesem Fall ist nach (2.2a): $Q^i_r=\varrho^{-1}\delta^i_r$, ferner wird nach (2.3): $'\Gamma=''\Gamma$ und somit auch $\frac{D\delta^i_r}{dt}=0$. Es besteht also nach (5.4) und (5.1) das

Korollar 5*. *Gilt in einem Weyl—Otsukischen Raum die Relation* (5.5), *so ist die Veränderung der Tensorlänge* $T_{(a)}$ *eines antisymmetrischen Tensors* T^{ij} *bei einer Parallelverschiebung zu* $T_{(a)}$ *selbst proportional. Es ist*

$$\frac{DT_{(a)}}{dt} = \sigma T_{(a)}, \quad \sigma \overset{\text{def}}{=} \varrho^{-2}\gamma_k \frac{dx^k}{dt}. \tag{5.6}$$

§ 6. Bemerkungen über dem Tensor g_{ij}

In den klassischen Weylschen Räumen, wo $P^i_j = \delta^i_j$ und folglich $\nabla_k \delta^i_j = 0$ ist, folgt bekanntlich aus (2.7), d. h. aus $\nabla_k g_{ij} = \gamma_k g_{ij}$ auch $\nabla_k g^{ij} = -\gamma_k g^{ij}$ (vgl. z. B. [2], Formel (7.1) a), wo aber der Raum ein Linienelementraum, d. h. allgemeiner, als ein Punktraum ist). Wir wollen die Formel von $\nabla_k g^{ij}$ in den Weyl—Otsukischen Räumen bestimmen.

Der Tensor g^{ih} ist bekanntlich durch die Formel

$$g_{ij} g^{jh} = \delta^h_i$$

bestimmt. Die mit Hilfe von $''\Gamma_a{}^b{}_c$ gebildete kovariante Ableitung von beiden Seiten gibt

$$(''\nabla_k g_{ij}) g^{jh} + (''\nabla_k g^{jh}) g_{ij} = 0, \tag{6.1}$$

wo $''\nabla_k$ die mit $''\Gamma$ gebildete gewöhnliche affine kovariante Ableitung bezeichnet (vgl. [4], § 3, S. 111). Offenbar ist $''\nabla_k g_{ij} = g_{ij|k}$, hingegen gilt wegen

$$\delta^h_{r|k} = {}'\Gamma_r{}^h{}_k - {}''\Gamma_r{}^h{}_k \tag{6.2}$$

für $''\nabla_k g^{ij}$ die Relation

$$''\nabla_k g^{jh} = g^{jh}{}_{|k} - \delta^j_{r|k} g^{rh} - \delta^h_{r|k} g^{jr}.$$

Aus (6.1) wird somit

$$g_{ij|k} g^{jh} + g^{jh}{}_{|k} g_{ij} = \delta^j_{r|k} g^{rh} g_{ij} + \delta^h_{i|k}. \tag{6.3}$$

Die in (6.3) vorkommende kovariante Ableitung von g_{ij} bzw. g^{jh} kann auf Grund von (2.5) mit Hilfe der kovarianten Ableitung ∇_k ausgedrückt werden. Aus (6.3) wird somit:

$$g^{jh} Q^r_i Q^s_j \nabla_k g_{rs} + g_{ij} Q^j_r Q^h_s \nabla_k g^{rh} = \delta^j_{r|k} g^{rh} g_{ij} + \delta^h_{i|k}. \tag{6.4}$$

Wir müssen jetzt aus dieser Gleichung $\nabla_k g^{jh}$ unter Beachtung von (2.7) bestimmen. Ziehen wir in der Symmetrieforderung (2.1) die Indizes herauf, so wird:

$$g^{ab} P^i_b = g^{ib} P^a_b,$$

beachten wir (2.7), so wird aus (6.4) nach einer Kontraktion auf beiden Seiten mit $g^{ac}P_c^i P_h^b$:

$$\nabla_k g^{ab} = -\gamma_k g^{ab} + (\nabla_k \delta_r^a) g^{rb} + (\nabla_k \delta_r^b) g^{ar}. \tag{6.5}$$

Aus dieser Formel folgt

Satz 6. *Die Relation*

$$g^{rb} \nabla_k \delta_r^a + g^{ra} \nabla_k \delta_r^b = 0 \tag{6.6}$$

ist notwendig und hinreichend dafür, daß neben g_{ij} auch g^{ij} rekurrente kovariante Ableitung habe mit $(-\gamma_k)$ als Rekurrenzvektor.

Wir gehen jetzt zur Diskussion des Falles über, in dem der Tensor g_{ij} außer (2.7), längs einer vorgegebenen Kurve $C: x^i = x^i(t)$ auch der Bedingung

$$P_i^a P_j^b g_{ab} = \tau(t) g_{ij} \quad (\tau(t) \neq 0) \tag{6.7}$$

genügt, d. h. g_{ij} ist nicht nur ein rekurrenter metrischer Fundamentaltensor, sondern längs der Kurve C auch ein zur Funktion $\tau(t)$ gehöriger Eigentensor.

Es kann leicht ein solcher Weyl—Otsukischer Raum konstruiert werden, in dem also (2.7) und (6.7) gleichzeitig erfüllt sind. Die Forderung (6.7) ist nämlich eine Bedingung für $g_{ij}(x)$ und P_i^a, sogar nur längs einer Kurve C. Befriedigt nun g_{ij} die Bedingung (6.7), so bestimmt (2.7) ein Gleichungssystem für die Übertragungsparameter $''\Gamma_a{}^b{}_c$, und auf Grund von (2.3) können auch die Übertragungsparameter $'\Gamma_a{}^b{}_c$ bestimmt werden (vgl. [3], Formel (2.3)).

Aus der Bedingung (6.7) kann nun die Formel

$$g_{mj} \frac{D\delta_i^m}{dt} + g_{mi} \frac{D\delta_j^m}{dt} = g_{ij} \frac{d\tau}{dt} \tag{6.8}$$

abgeleitet werden, wie wir das in [3] durchgeführt haben (vgl. [3], Satz 5, insbesondere Gleichung (4.4)).

Wir wollen nun mit Hilfe von (6.8), das also eine Folgerung von (6.7) ist, die Formeln (3.10), (4.4) und (5.4) unformen. Führen wir die Bezeichnungen

$$\tilde{V}^i \overset{\text{def}}{=} Q_r^i V^r, \quad \tilde{V}^2 = g_{ij} \tilde{V}^i \tilde{V}^j \tag{6.9}$$

ein, so geht (3.10) unter Beachtung der Symmetriebedingung (3.13) in

$$\frac{DV}{dt} = \frac{1}{2} V^{-1} \tilde{V}^2 \gamma_k \frac{dx^k}{dt} - V^{-1} g_{im} \tilde{V}^i \tilde{V}^s \frac{D\delta_s^m}{dt} \tag{6.10}$$

über. Nach einer Kontraktion von (6.8) mit $\tilde{V}^i \tilde{V}^j$ und dann unter Beachtung der mit (6.7) äquivalenten Relation

$$Q_i^r Q_j^s g_{rs} = \tau^{-1} g_{ij}, \tag{6.11}$$

bekommt man

$$\frac{D\delta_j^m}{dt} g_{im} \tilde{V}^i \tilde{V}^j = \frac{1}{2} \tilde{V}^2 \frac{d\tau}{dt}, \quad \tilde{V}^2 = \tau^{-1} V^2,$$

wodurch (6.10) in der Form:

$$\frac{DV}{dt} = \frac{1}{2} \tau^{-1} \left(\gamma_k \frac{dx^k}{dt} - \frac{d\tau}{dt} \right) V \tag{6.12}$$

geschrieben werden kann.

Wir gehen nun zur Umformung von (4.4) über, wenn (6.7) bzw. (6.8) besteht. Die Formel (4.4) kann mit Hilfe der Bezeichnung:

$$\tilde{T}^{rs} \stackrel{\text{def}}{=} Q_i^r Q_j^s T^{ij},$$

ferner in Hinsicht auf die Symmetrie von T^{ij}, bzw. nach (3.13), in der Form

$$\frac{DT}{dt} = g_{rs} \tilde{T}^{rs} \gamma_k \frac{dx^k}{dt} - 2 g_{is} \tilde{T}^{ie} \frac{D\delta_e^s}{dt} \tag{6.13}$$

geschrieben werden. Aus (6.8) folgt aber nach einer Kontraktion mit $\tilde{T}^{ij}$ und in Hinsicht auf (6.11):

$$2 g_{mj} \tilde{T}^{ij} \frac{D\delta_i^m}{dt} = \frac{d\tau}{dt} g_{ij} \tilde{T}^{ij} = \tau^{-1} \frac{d\tau}{dt} T, \tag{6.14}$$

und wieder in Hinsicht auf (6.11) hat man noch

$$g_{rs} \tilde{T}^{rs} = g_{rs} Q_i^r Q_j^s T^{ij} = \tau^{-1} g_{ij} T^{ij} = \tau^{-1} T. \tag{6.15}$$

Substituieren wir (6.14) und (6.15) in (6.13), so wird:

$$\frac{DT}{dt} = \tau^{-1} \left(\gamma_k \frac{dx^k}{dt} - \frac{d\tau}{dt} \right) T. \tag{6.16}$$

Bei der Umformung von (5.4) benützen wir im Hinblick auf (6.11) und (5.1) die folgenden Bezeichnungen:

$$\hat{T}^{ps} \stackrel{\text{def}}{=} Q_i^p T^{is}, \quad \hat{T}^2 \stackrel{\text{def}}{=} g_{pr} \hat{T}^r{}_s \hat{T}^{ps} \equiv \tau^{-1} T_{(a)}^2.$$

Aus der Formel (5.4) folgt somit:

$$\frac{DT_{(a)}}{dt} = T_{(a)}^{-1} \left(\hat{T}^2 \gamma_k \frac{dx^k}{dt} - 2 \hat{T}^{bs} T_{is} Q_c^i \frac{D\delta_b^c}{dt} \right). \tag{6.17}$$

Nun ist nach (3.13):

$$T_{is} Q_c^i = g_{im} T^m{}_s Q_c^i = g_{ic} \hat{T}^i{}_s = \hat{T}_{cs},$$

und aus (6.17) wird

$$\frac{DT_{(a)}}{dt} = T_{(a)}^{-1}\left(\hat{T}^2 \gamma_k \frac{dx^k}{dt} - 2\hat{T}^{bs}\hat{T}_{cs}\frac{D\delta_b^c}{dt}\right). \tag{6.18}$$

Eine Kontraktion von (6.8) mit $\hat{T}^j{}_s\hat{T}^{is}$ gibt nach entsprechenden Vertauschungen der Indizes:

$$2\hat{T}_{ms}\hat{T}^{bs}\frac{D\delta_b^m}{dt} = \frac{d\tau}{dt}\hat{T}_{is}\hat{T}^{is} = \frac{d\tau}{dt}\hat{T}^2,$$

wodurch (6.18) in

$$\frac{DT_{(a)}}{dt} = T_{(a)}^{-1}\hat{T}^2\left(\gamma_k\frac{dx^k}{dt} - \frac{d\tau}{dt}\right) \equiv \tau^{-1}\left(\gamma_k\frac{dx^k}{dt} - \frac{d\tau}{dt}\right)T_{(a)} \tag{6.19}$$

übergeht.

Wir fassen unsere Resultate im folgenden Satz zusammen:

Satz 7. *Ist in einem Weyl—Otsukischen Raum der metrische Grundtensor* g_{ij} *längs einer Kurve C ein Eigentensor, so sind die Differentialquotienten der entsprechenden Tensorlängen zu den ursprünglichen Tensorlängen proportional und die Formeln* (6.12), (6.16) *und* (6.19) *bestimmen der Reihe nach die Veränderung der Länge der Vektoren bzw. die der symmetrischen und antisymmetrischen Tensoren bei einer Parallelverschiebung längs C. In allen drei Fällen ist* $\gamma_k\frac{dx^k}{dt} = \frac{d\tau}{dt}$ *notwendig und hinreichend dafür, daß die Länge bei Parallelverschiebung konstant sei, wenn nur* g_{ij} *eine positiv-definite Metrik bestimmt.*

Schriftenverzeichnis

[1] A. Kawaguchi, On areal spaces. I, *Tensor,* N. S. **1** (1950), 14—45.

[2] A. Moór, Über eine Übertragungstheorie der metrischen Linienelementräume mit rekurrentem Maßtensor, *Tensor,* N. S. **29** (1975), 47—63.

[3] A. Moór, Otsukische Übertragung mit rekurrentem Maßtensor. *Acta Sci. Math.,* **40** (1978), 129—142.

[4] T. Otsuki, On general connections. I, *Math. J. Okayama Univ.,* **9** (1959—60), 99—164.

[5] H. Weyl, Reine Infinitesimalgeometrie, *Math. Zeitschrift,* **2** (1918), 384—411.

LEHRSTUHL FÜR MATHEMATIK
UNIV. FÜR FORST UND HOLZINDUSTRIE
H—9401 SOPRON, PF. 132